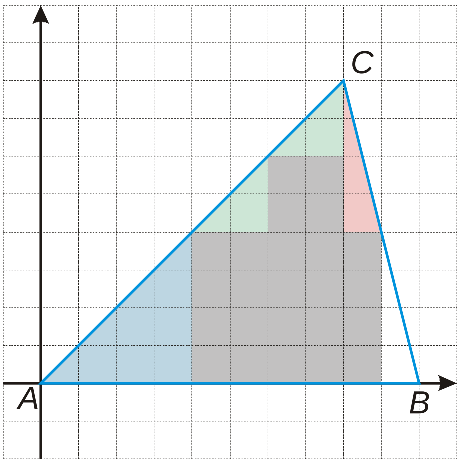
2.7.8 Obsah trojúhelníku

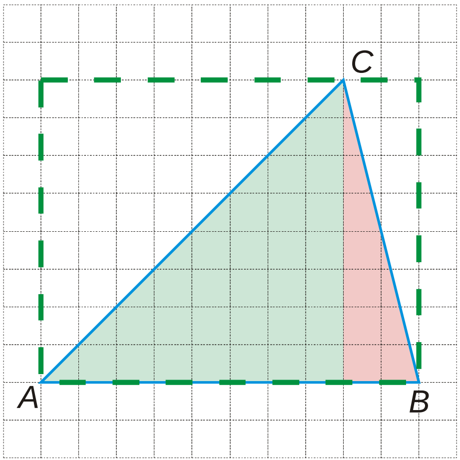
Předpoklady: 020707

Př. 1: Nakresli na čtverečkovaný papír trojúhelník ABC: $A[0;0]$, $B[10;0]$, $C[7;8]$. Urči obsah trojúhelníku. Najdi vzorec pro jeho výpočet z rozměrů trojúhelníku (analogie vzorce z předchozí hodiny).

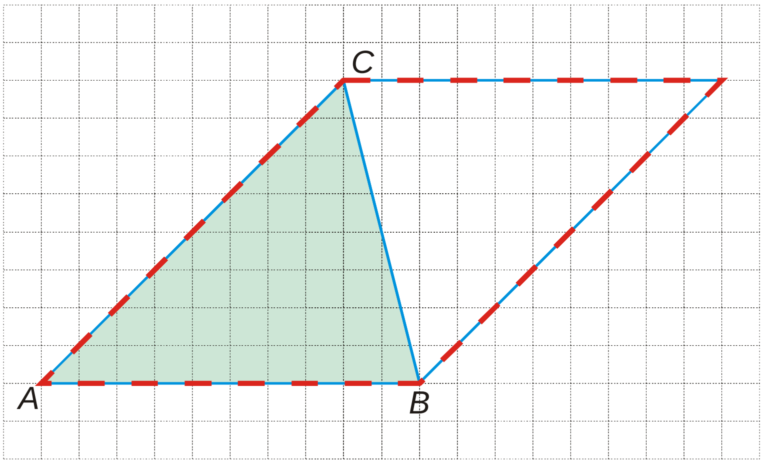


Obsah trojúhelníku: $S = 4\cdot 5 + 4 + 4 + 4 + 8 = 40$ čtverečků

Jak vzorcem?



Obsah trojúhelníku je polovinou obsahu zeleného obdélníku o stranách a a v_a (kolmá vzdálenosti od vrcholu C k úsečce AB): $S = \frac{av_a}{2}$.



Obsah trojúhelníku je polovinou obsahu červeného rovnoběžníku o obsahu $S = a \cdot v_a$ $\Rightarrow$ $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$.

Pedagogická poznámka: Žáků, kteří doplní trojúhelník na rovnoběžník je minimum. Daleko častější je doplnění na obdélník rozdělením trojúhelníku na dvě pravoúhlé části. Při kontrolo nejdřív ukazujeme obrázku bez komentáře, aby žáci měli ještě šanci si obrázek sami rozmyslet.

Nezáleží na tom, kterou stranu si označíme jako a $\Rightarrow$ obsah trojúhelníku můžeme určit pomocí libovolné strany a k ní náležící výšky.

Obsah trojúhelníku určíme pomocí libovolné strany a k ní náležící výšky vzorcem $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$.

Pedagogická poznámka: Kalkulačky povolují až od příkladu 5.

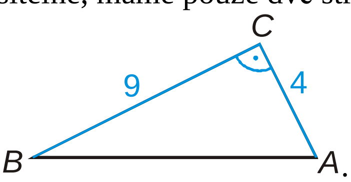
Př. 2: Vypočti obsah trojúhelníku *KLM*, jeli dáno $m = 5\,\text{cm}$, $v_m = 3\,\text{cm}$.

$$S = \frac{m \cdot v_m}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2}\,\text{cm}^2 = 7,5\,\text{cm}^2$$

Trojúhelník má obsah $7,5\,\text{cm}^2$.

Př. 3: V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým úhlem γ platí: $a = 9\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$. Urči jeho obsah.

Na první pohled neřešitelné, máme pouze dvě strany a žádnou výšku.

Nakreslíme obrázek: .

Jasné. Trojúhelník je pravoúhlý $\Rightarrow$

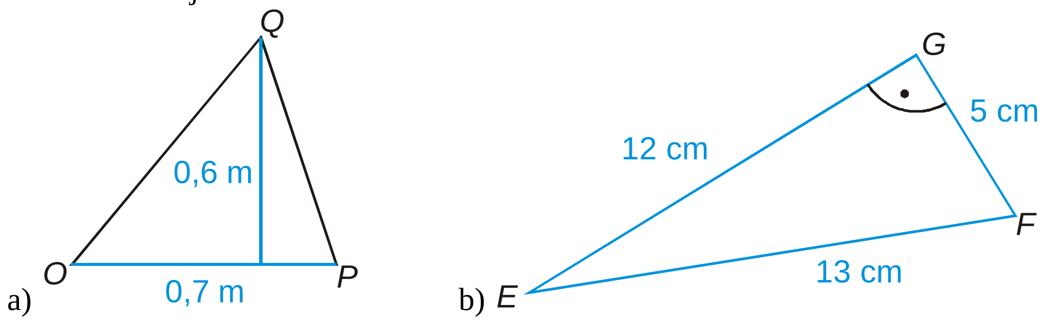
- strana b je zároveň výškou v_a,
- strana a je zároveň výškou v_b.

$\Rightarrow \; S = \frac{ab}{2} = \frac{9 \cdot 4}{2}\ \mathrm{cm}^2 = 18\ \mathrm{cm}^2$

Obsah trojúhelníku ABC je $18\ \mathrm{cm}^2$.

Pedagogická poznámka: Většina žáků vyřeší předchozí příklad ihned, ostatní mají blok. Chci, aby si nakreslili obrázek (důležité je, aby trojúhelník na něm byl opravdu pravoúhlý) a do něj si nakreslili výšku, kterou potřebují (a v zadání ji nemají).

Př. 4: Urči obsah trojúhelníků na náčrtcích.



a) Z obrázku je zřejmé, že platí: $a = 0{,}7\ \mathrm{m}$, $v_a = 0{,}6\ \mathrm{m}$

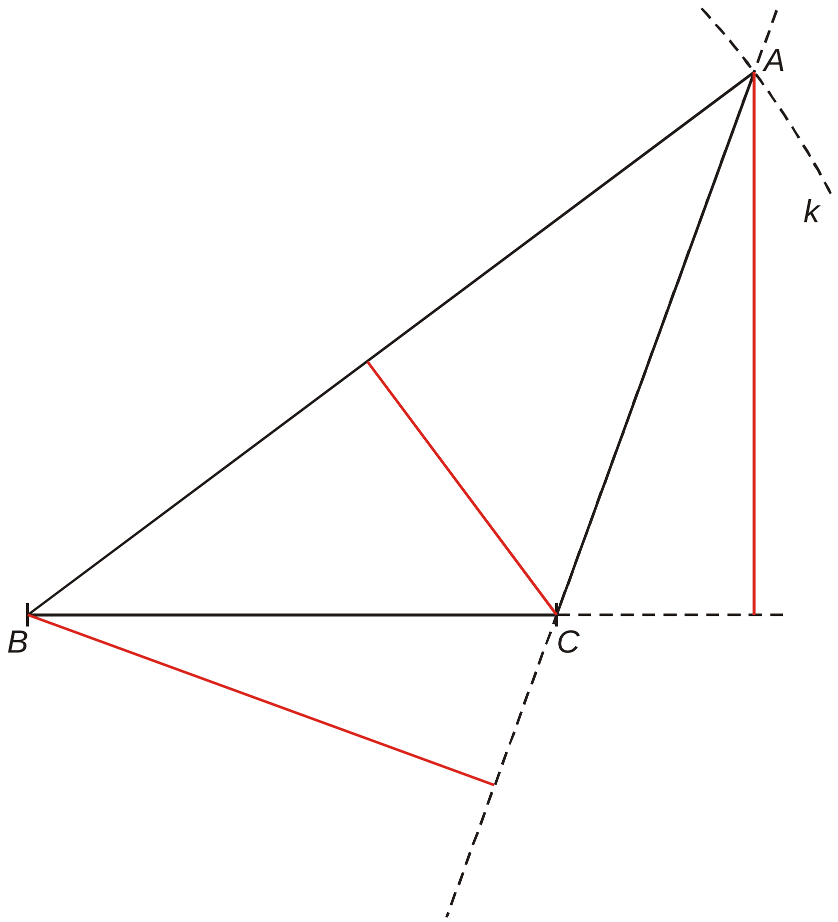
$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}6}{2}\ \mathrm{m}^2 = 0{,}21\ \mathrm{m}^2$

b) Z obrázku je zřejmé, že platí: $a = 12\ \mathrm{cm}$, $v_a = 5\ \mathrm{cm}$

$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2}\ \mathrm{cm}^2 = 30\ \mathrm{cm}^2$

Pedagogická poznámka: V bodě a) působí problémy násobení desetinných čísel.

Př. 5: Narýsuj trojúhelník *ABC*: $a = 7\,\text{cm}$, $c = 12\,\text{cm}$, $\gamma = 110°$. Změř délku zbývající strany. Narýsuj všechny tři výšky, změř jejich velikost a spočti všemi způsoby obsah trojúhelníku. Rozdíly mezi získanými výsledky jsou mírou Tvé přesnosti (všechny hodnoty obsahu by měly vyjít stejné). Urči průměrný výsledek a rozdíl mezi největší a nejmenší získanou hodnotou. Spočti kolik procent z průměrné hodnoty představuje rozdíl největší a nejmenší hodnoty.



$a = 7\text{ cm}$, $v_a = 7{,}2\text{ cm} \Rightarrow S = \dfrac{a \cdot v_a}{2} = \dfrac{7 \cdot 7{,}2}{2}\text{ cm}^2 = 25{,}2\text{ cm}^2$

$b = 7{,}6\text{ cm}$, $v_b = 6{,}6\text{ cm} \Rightarrow S = \dfrac{b \cdot v_b}{2} = \dfrac{7{,}6 \cdot 6{,}6}{2}\text{ cm}^2 = 25{,}08\text{ cm}^2$

$c = 12\text{ cm}$, $v_c = 4{,}2\text{ cm} \Rightarrow S = \dfrac{c \cdot v_c}{2} = \dfrac{12 \cdot 4{,}2}{2}\text{ cm}^2 = 25{,}2\text{ cm}^2$

Průměrná hodnota: $\dfrac{25{,}2 + 25{,}08 + 25{,}2}{3} = 25{,}16\text{ cm}^2$.

Rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou: $25{,}2 - 25{,}08 = 0{,}12\text{ cm}^2$.

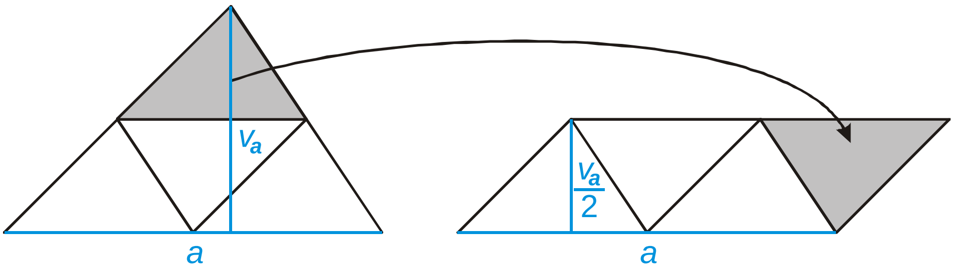
100 %	…	25,16
x %	…	0,12

$$\frac{x}{0{,}12} = \frac{100}{25{,}16} \Rightarrow x = \frac{100}{25{,}16} \cdot 0{,}12 = 0{,}48\ \%$$

Rozdíl největší a nejmenší vypočtené hodnoty představuje pouze 0,48 % z průměrného výsledku.

Dodatek: Přesný výsledek získaný výpočtem s přesností na 6 desetinných míst je 25,135234. V hodině je možné zprůměrovat více dětských výsledků a sledovat, zda se výsledek nepřiblíží správné hodnotě více než průměr vypočtený v příkladu (což se při dostatečném počtu hodnot většinou stane).

Př. 6: Vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku je možné také odvodit pomocí středních příček. Nakresli si obrázek trojúhelníku rozděleného středními příčkami a uprav ho tak, aby z něj vyplýval vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku.



Střední příčky rozdělí trojúhelník na čtyři části. Pokud vrchní část vhodně přesuneme, získáme rovnoběžník se stejným obsahem jako měl původní trojúhelník, se stranou *a* a výškou $\frac{v_a}{2}$, tedy s obsahem $S = a\frac{v_a}{2} = \frac{a \cdot v_a}{2}$.

Shrnutí: Obsah trojúhelníku určíme pomocí libovolné strany a k ní náležící výšky vzorcem $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$.